第 9 講　2 次方程式

PART1　2 次方程式の解法

要点 ①　2 次方程式と因数分解による解法，平方根による解法

$2x^2=7x+4$，$x^2=9$ のように，等式のすべての項を移項すると

（a，b，c は定数，$a \neq 0$）

の形で表される方程式を，x の 2 次方程式という。

方程式の　　　　　　を求めることを，方程式を　　　という。

2 次方程式を因数分解を使って解く。その際に用いるのは，次の性質である。

> 2 つの数 A，B について
>
> 「$A \times B=0$」 ならば 「$A=0$　または　$B=0$」

例　2 次方程式 $2x^2-3x-2=0$ を解く。

左辺を因数分解すると

よって，　　$=0$　または　　$=0$

したがって，この 2 次方程式の解は $x=-\dfrac{1}{2}$，2

次に，2 次方程式を平方根の考え方を使って解く。

例　2 次方程式 $x^2-2=0$ を解く。

$x^2=2$ より，x は 2 乗すると 2 になる数，すなわち，2 の平方根である。

したがって，この 2 次方程式の解は　$x=$

要点 ②　解の公式による解法

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の　　　　　は次のようになる。

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$b^2-4ac \geqq 0$ のとき　　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

（証明）

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$　…①について，①の左辺を「　　　　　　　」すると

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\qquad\right)+c=a\left(x+\qquad\right)^2\qquad\qquad+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

となる。よって，①は

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \qquad \text{すなわち} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

と変形できる。よって，　　　　　$\geqq 0$ のとき

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad \text{すなわち} \qquad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって，①の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2 次方程式の解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ において，$b=2b'$ とおくと

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{\quad b'^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{\quad(b'^2-ac)}}{2a}=\frac{-2b'\pm\quad\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

よって，次の公式が得られる。

> 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は
>
> $b'^2-ac\geqq 0$ のとき　　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

例　2 次方程式 $5x^2-6x-1=0$ の解は

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot5\cdot(-1)}}{2\cdot5}=\frac{6\pm\sqrt{56}}{10}=\frac{6\pm2\sqrt{14}}{10}=\frac{3\pm\sqrt{14}}{5}$$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-5\cdot(-1)}}{5}=\frac{3\pm\sqrt{14}}{5}$$

1 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2-5x-36=0$　(2) $x^2+12x+36=0$　(3) $3x^2-7x-6=0$

(4) $x^2-12=0$　(5) $2x^2-5x+1=0$　(6) $x^2+2x-1=0$

Point Pickup

2次方程式の解法

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解法は以下の通り

① **左辺の「　　　　　　」を考える。**

② **$ax^2+c=0$ (x の係数が 0)の形のときは,「　　　　　」の利用を考える。**

③ **「　　　　　　」の利用。**

$b^2-4ac \geqq 0$ のとき　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

特に　$b=2b'$　かつ　$b'^2-ac \geqq 0$　のときは　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

第 9 講 PART1 確認問題

次の 2 次方程式を解け。

1 $x^2+3x-10=0$

$x=$ アイ , ウ

2 $x^2-10x+25=0$

$x=$ エ

3 $2x^2+5x-3=0$

$x=$ オカ , $\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$

4 $x^2-18=0$

$x=\pm$ ケ $\sqrt{\text{コ}}$

5 $3x^2-7x+1=0$

$x=\dfrac{\text{サ}\pm\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$

6 $x^2+6x-2=0$

$x=$ ソタ $\pm\sqrt{\text{チツ}}$

第 9 講　2 次方程式

PART1　2 次方程式の解法

1　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2-5x-36=0$　　(2)　$x^2+12x+36=0$　　(3)　$3x^2-7x-6=0$

(4)　$x^2-12=0$　　(5)　$2x^2-5x+1=0$　　(6)　$x^2+2x-1=0$

[解答]

(1)　$x^2-5x-36=0$　　$(x-9)(x+4)=0$　　$x=9,\ -4$

(2)　$x^2+12x+36=0$　　$(x+6)^2=0$　　$x=-6$

(3)　$3x^2-7x-6=0$　　$(3x+2)(x-3)=0$　　$x=-\dfrac{2}{3},\ 3$

(4)　$x^2-12=0$　　$x^2=12$　　$x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

(5)　$2x^2-5x+1=0$　　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-8}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

(6)　$x^2+2x-1=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-1)}}{1}=-1\pm\sqrt{2}$$

（別解）

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

第 9 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-5，ウ：2

[解説]

$x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$ [A]

$\boldsymbol{x=-5,\ 2}$

> [A]　左辺が因数分解できるときは，因数分解を利用する。

2

[正解] エ：5

[解説]

$x^2-10x+25=0$

$(x-5)^2=0$ [B]

$\boldsymbol{x=5}$

> [B]　左辺が因数分解できるときは，因数分解を利用する。

3

[正解] オカ：-3，キ：1，ク：2

[解説]

$2x^2+5x-3=0$

$(x+3)(2x-1)=0$ [C]

$\boldsymbol{x=-3,\ \dfrac{1}{2}}$

> [C]　左辺が因数分解できるときは，因数分解を利用する。

4

[正解] ケ：3，コ：2

[解説]

$x^2-18=0$

$x^2=18$ [D]

$x=\pm\sqrt{18}$

$\boldsymbol{x=\pm 3\sqrt{2}}$

> [D]　$x^2=k$ $(k>0)$ の解は，$x=\pm\sqrt{k}$

5 **[正解]** サ：7，シス：37，セ：6

[解説]

$$3x^2-7x+1=0$$

解の公式より，

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} \quad \text{[E]}$$

$$=\frac{\mathbf{7\pm\sqrt{37}}}{\mathbf{6}}$$

[E]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

6 **[正解]** ソタ：−3，チツ：11

[解説]

$$x^2+6x-2=0$$

解の公式より，

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot(-2)}}{1} \quad \text{[F]}$$

$$=\mathbf{-3\pm\sqrt{11}}$$

[F]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$